

CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE
ISTITUTO DI FISICA DELL'ATMOSFERA

CONSIDERAZIONI SULLA DIGITALIZZAZIONE
E L'ELABORAZIONE DEI SEGNALI SODAR

Angelo Ricotta

IFA 83/11

LUGLIO 1983

PIAZZALE LUIGI STURZO, 31 - 00144 ROMA
AREA DI RICERCA CNR - VIA GALILEI - CAS. POST. 27 - 00044 PRASCATI

INDICE

Introduzione	Pag.	1
1. Caratteristiche del segnale Sodar	"	1
2. Problemi di campionamento	"	4
3. Eterodinaggio analogico e numerico	"	7
4. Caratteristiche generali dell'analisi spettrale	"	10
5. Relazioni fra i coefficienti della tra- sformata discreta quella continua e la serie di Fourier	"	12
6. Note sulla FFT	"	15
Appendice 1 - Correlazioni incrociate nel dominio del tempo e in quello delle frequenze	"	17
Bibliografia	"	24

CONSIDERAZIONI SULLA DIGITALIZZAZIONE E L'ELABORAZIONE DEI SEGNALI SODAR

INTRODUZIONE

L'elaborazione degli echi Sodar presenta una varietà di problemi allorchè si richieda una certa precisione e rapidità nella misura, ad esempio, della deriva Doppler. Con bassi rapporti segnale-rumore la misura della velocità del vento dalla stima del momento primo dello spettro dell'eco con metodi operanti nel dominio del tempo è affetta da errori e inconvenienti (Keeler, 1976). L'analisi spettrale del segnale, ad esempio mediante la FFT, permette di ottenere la desiderata accuratezza. Inoltre è possibile ridurre gli errori dovuti all'influenza dello spettro del rumore limitando la ricerca dello scostamento Doppler alla porzione in cui il segnale è prevalente.

Questo procedimento attualmente necessita dell'uso di un calcolatore e di un relativamente grande tempo di calcolo soprattutto a causa del gran numero di operazioni richieste dalla FFT.

E' apparso quindi necessario per un'operazione in tempo reale del sistema Sodar, mettere a punto metodi che riducessero il tempo di calcolo senza sacrificare la precisione.

Un contributo applicabile almeno ai segnali Sodar è illustrato nel seguito. Si discutono anche aspetti più generali dell'analisi spettrale e si identificano alcuni accorgimenti particolari. In appendice si riporta una breve storia dell'attività Sodar.

1. Caratteristiche del segnale Sodar

Il segnale Sodar terminale è una tensione alternata dell'ordine delle centinaia di millivolt costituita da una portante compresa in genere tra 1000 e 3000 Hz, modulata in frequenza e fortemente in ampiezza e trat-

tata con filtri banda-passante di larghezza tra i 100 e i 300 Hz in funzione dell'entità dei venti da misurare (cfr. eq. 1). Tale segnale è strutturato in stringhe temporali tipicamente di 6 s che corrispondono a scansioni in altezza intorno a 1000 m. Alla fine di ogni scansione vi è normalmente un intervallo morto di 180 ms già compresi nei 6 s. Poiché la risoluzione spaziale richiesta è in genere intorno ai 30 m, la singola scansione viene suddivisa in una trentina di segmenti di circa 170 ms sui quali si esegue l'analisi spettrale, la ricerca della frequenza di ricezione e il calcolo del vento secondo la (1).

Per un'analisi in tempo reale ogni segmento deve essere elaborato senza perdere i dati che arrivano continuamente. E' necessario perciò che tutta la procedura di elaborazione venga contenuta entro 170 ms e inoltre bisogna utilizzare un sistema di acquisizione a doppio buffer di memoria in modo da poterli scambiare ad ogni operazione di acquisizione-elaborazione di un segmento di dati.

Allorchè si utilizzano sistemi a più antenne, dal punto di vista della rapidità di elaborazione è spesso preferibile utilizzare frequenze diversificate per le varie antenne in modo da poterle miscelare prima dell'elaborazione; in tal modo si può eseguire un'analisi spettrale simultanea per tutte le antenne per ogni segmento temporale.

Per il Sodar trisstatico (Ricotta e Berico, 1980) con questa procedura si può avere un guadagno di tempo di circa 2,5 volte.

Lo spettro di potenza di un segnale Sodar tipico è illustrato in Fig. 1.

Si definisce (Spizzichino, 1975) frequenza dell'eco o di ricezione la quantità seguente che è il momento primo normalizzato

$$f_E = \frac{\int_R P(f) f df}{\int_R P(f) df}$$

dove $P(f) \equiv |A(f)|^2$ e gli integrali sono estesi all'intervallo ridotto R.

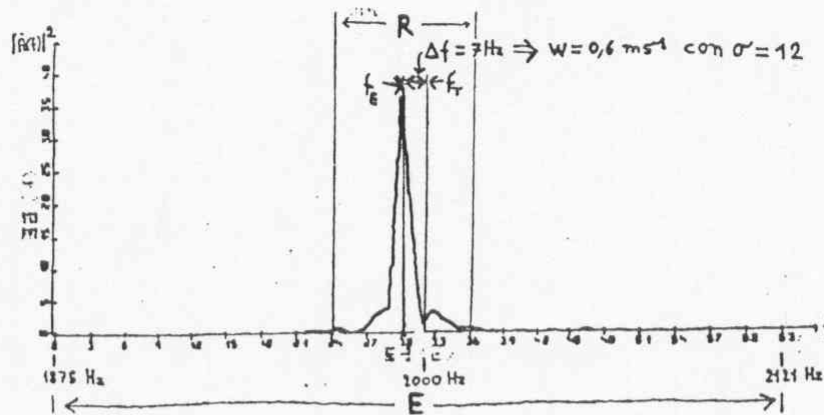


Fig. 1 - Spettro di potenza di un segmento temporale di 256 ms di un segnale Sodar.

Si definisce intensità I del segnale la

$$I = \int_R P(f) df$$

Inoltre possiamo definire una varianza massimale della stima della frequenza ricevuta come

$$\sigma_f^2 = \frac{\int_E P(f) (f - f_E)^2 df}{\int_E P(f) df}$$

dove gli integrali sono eseguiti sull'intervallo esteso E .

Poichè il vento radiale V_R viene stimato come

$$V_R = \frac{c}{2} \frac{f_T - f_E}{f_T} \quad (1)$$

dove c è la velocità del suono, f_T la frequenza di trasmissione, possiamo attribuire una deviazione standard a V_R come (Spizzichino, 1974)

$$\sigma_{V_R} = \frac{\lambda_T}{2} \sigma_f$$

dove $\lambda_T = c/f_T$ è la lunghezza d'onda del segnale trasmesso.

Un metodo rivelatosi empiricamente utile per selezionare i dati ritenuti buoni è stato finora l'uso della quantità

$$\phi = \frac{\int_R P(f) df}{\int_E P(f) df}$$

che esprime quale frazione del segnale totale è contenuta nell'intervallo ridotto R prescelto.

2. Problemi di campionamento

Per rendere adatto l'eco Sodar, che è un segnale continuo, al trattamento numerico è necessario quantizzarlo. Ciò si realizza con un'opportuna interfaccia (Fig. 2) e un A/D connessi con il calcolatore per l'elaborazione.

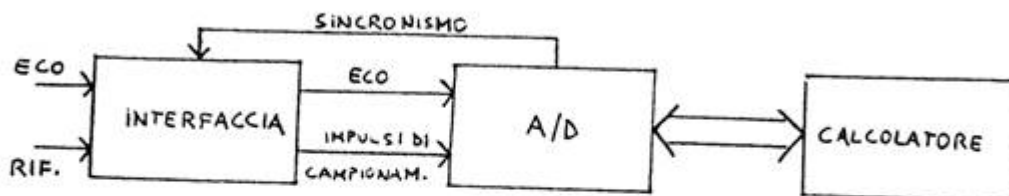


Fig. 2 - Sistema di campionamento dell'eco.

L'interfaccia è in grado di elaborare un riferimento analogico, generato dall'unità centrale del Sodar simultaneamente all'eco, per produrre gli impulsi di campionamento per l'A/D con una frequenza $f_c = f_R \frac{A}{B}$ dove f_R è la frequenza del riferimento e A, B numeri naturali. La caratteristica suddetta permette un'ampia scelta della frequenza di campionamento a partire da un solo riferimento (Ricotta e Berico, 1980).

Prescindiamo in questo contesto dagli errori introdotti dal sistema di acquisizione e da eventuali ricostruzioni del segnale di tipo non spettrale (Gadway, 1975; Bendat & Piersol, 1971).

Il nostro problema è minimizzare la frequenza di campionamento note alcune caratteristiche del segnale. In tal modo fissata la lunghezza temporale della registrazione da analizzare si diminuisce il numero dei punti su cui si esegue la FFT e quindi anche il tempo di calcolo.

Il criterio di Nyquist per un segnale banda limitata tra 0 ed f_{\max} stabilisce che la frequenza di campionamento deve essere $f_c > 2 f_{\max}$ per evitare l'aliasing ovvero la perdita d'informazione derivante dal ribaltamento delle alte frequenze dello spettro del segnale su quelle più basse.

Infatti se f è una frequenza dello spettro del segnale tale che $0 \leq f \leq \frac{f_c}{2}$, le eventuali frequenze più alte che vengono confuse (aliased) con f sono quelle per cui $f' = 2n \left(\frac{f_c}{2}\right) \pm f$ con $n = 1, 2, 3 \dots$ allorchè si campiona con f_c com'è illustrato in Fig. 3.

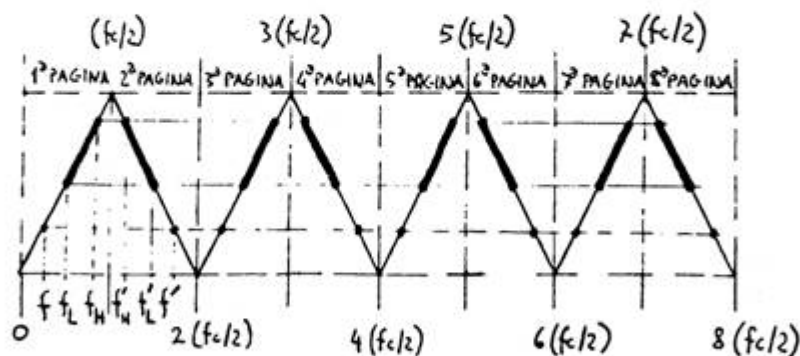


Fig. 3 - Ribaltamento intorno alla frequenza di Nyquist ($f_c/2$).
(Da Bendat & Piersol, 1971).

Questo fatto implica che tutte le componenti dello spettro del segnale maggiori-uguali di $f_c/2$ vengono ribaltate nell'intervallo $[0, f_c/2]$.

Le considerazioni precedenti possono facilmente estendersi anche a segnali con spettri banda passante ovvero con frequenza minima $f_L \neq 0$ quali sono gli echi Sodar.

Sia infatti $[f_L, f_H]$ la banda del nostro segnale. Poichè tutte le frequenze $f \gg \frac{f_c}{2}$ vengono ribaltate nell'intervallo $[0, f_c/2]$, per evitare l'aliasing deve essere per $n = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{cases} n \frac{f_c}{2} < f_L \\ f_H < (n+1) \frac{f_c}{2} \end{cases} \quad (2)$$

che equivale a dire, osservando la Fig. 3, che la banda $\Delta f = f_H - f_L$ del nostro segnale deve essere tutta dentro una delle pagine contrassegnate.

Il diagramma di Fig. 3 può essere immaginato come un soffietto con le pagine che possono ripiegarsi alternativamente sulla prima.

Dalle (2) si ha

$$\begin{aligned} \frac{f_c}{2} &< \frac{f_L}{n} \\ f_H &< n \frac{f_c}{2} + \frac{f_c}{2} \end{aligned}$$

da cui a fortiori

$$f_H < f_L + \frac{f_c}{n}$$

e infine

$$n < \frac{f_L}{f_H - f_L} \quad (3)$$

Inoltre direttamente dalle (2) si ottiene

$$\frac{2}{n+1} f_H < \frac{f_c}{2} < \frac{2}{n} f_L \quad (4)$$

Le disequaglianze (3) e (4) forniscono un algoritmo per calcolare, date le estremità della banda del segnale, l'insieme delle frequenze permesse di campionamento, in particolare la minima, che non danno luogo alla sovrapposizione (aliasing) precedentemente illustrata. Una conseguenza importante di tale risultato è che, se sussistono le condizioni, è possibile campionare un segnale con spettro banda passante a frequenza inferiore a $2 f_H$ e anzi inferiore a f_L .

In un esempio realistico sia il nostro segnale compreso tra 1550, 2100 Hz. In tal caso dalla (3) si ottiene $n < 2$ e gli insiemi permessi per le frequenze di campionamento sono per $n = 2$, $1400 \text{ Hz} < f_c < 1550 \text{ Hz}$

per $n = 1$, $2100 \text{ Hz} < f_c < 3100 \text{ Hz}$ e per $n = 0$ naturalmente $f_c > 4200 \text{ Hz}$ che coincide con il criterio di Nyquist come da noi inizialmente enunciato. Scegliendo una $f_c = 1500 \text{ Hz}$ andremo a vedere il nostro spettro in prima pagina tra 0 e 750 Hz dove occupa la banda da 50 a 600 Hz. Il nostro spettro originario trovandosi in terza pagina si ribalta con movimento a soffietto sulla prima mantenendo lo stesso ordinamento delle frequenze.

3. Eterodinaggio analogico e numerico

L'operazione di traslazione, in particolare verso il basso, di una banda di frequenze lungo l'asse f è una ben nota operazione che analogicamente si può eseguire moltiplicando con un tono puro di riferimento $R(t)$ il nostro segnale $E(t)$ nel dominio del tempo e filtrando poi la componente a frequenza più bassa (Fig. 4).

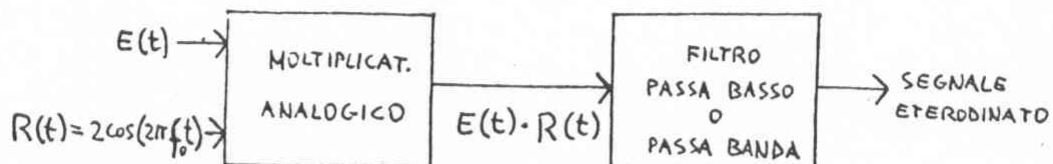


Fig. 4 - Eterodinaggio analogico dell'eco

All'uscita del moltiplicatore si ha $S(t) = R(t) E(t)$
 $= 2 \cos(2\pi f_0 t) \cdot E(t)$

La trasformata di Fourier $S(f)$ del prodotto di due funzioni nel dominio del tempo equivale alla convoluzione dei relativi spettri di frequenza per cui

$$S(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f-f') [\delta(f'-f_0) + \delta(f'+f_0)] df' = E(f-f_0) + E(f+f_0)$$

Questa operazione si può efficacemente illustrare in modo grafico (Fig. 5) con un procedimento tratto da Brigham (1974). La convoluzione grafica nel dominio delle frequenze fra la trasformata del segnale e le delta di Dirac del riferimento si esegue riproducendo lo spettro del segnale simmetricamente intorno ad ogni delta di Dirac.

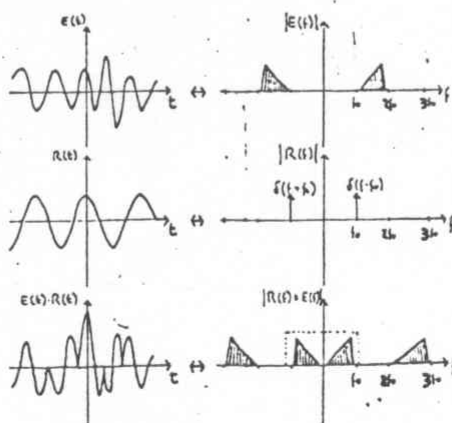


Fig. 5 - Relazione fra trasformata di Fourier e convoluzione nel dominio delle frequenze.

Il rettangolo tratteggiato nell'ultima figura in basso a destra rappresenta un filtro passa-basso la cui applicazione seleziona la parte a bassa frequenza dello spettro risultante. Il segnale così formato lo si può quindi campionare con $f_c \gg 2 f_0$ senza perdita d'informazione.

In alternativa a tale metodo di eterodinaggio analogico si possono utilizzare i risultati del paragrafo precedente per campionare il segnale direttamente alla più bassa frequenza possibile con il vantaggio di non dover utilizzare dell'apposito hardware.

Infatti il campionamento eseguito alle condizioni espresse dalla (3) e dalla (4) ha come risultato una sorta di eterodinaggio numerico che riproduce la nostra banda di frequenze iniziali nell'intervallo $[0, f_c/2]$.

Infatti l'operazione di digitalizzazione ideale altro non è nel dominio del tempo che il prodotto ^{di} con una sequenza di impulsi unitari infinitamente stretti (sampling function) con il segnale, che si traduce nel dominio delle frequenze come

$$\begin{aligned} S(f) &= f_0 \int_{-\infty}^{+\infty} E(f-f') \sum_{-\infty}^{+\infty} \delta(f'-nf_0) df' = \\ &= f_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} E(f-f') \delta(f'-nf_0) df' = \\ &= f_0 \sum_{-\infty}^{+\infty} E(f-nf_0) \end{aligned}$$

il cui spettro a meno dell'inessenziale fattore f_0 si può interpretare, analogamente al procedimento illustrato in Fig. 5, come la somma degli spettri del segnale $E(f)$ traslati di $\pm n f_0$ con $n=0, 1, 2, 3, \dots$ i quali nelle condizioni di campionamento espresse dalle (3) e (4) non si sovrappongono.

4. Caratteristiche generali dell'analisi spettrale

Ai fini della precedente discussione è inessenziale che il trattamento numerico utilizzi effettivamente la trasformata discreta di Fourier e non quella continua e che la sequenza degli impulsi di campionamento sia finita anziché infinita.

Il primo fatto produce essenzialmente uno spettro a righe anziché continuo (Brigham, 1974) e il secondo determina la risoluzione spettrale di esso oltre a produrre eventualmente fenomeni di leakage (Harris, 1978).

Di seguito diamo alcuni parametri caratteristici di un'analisi spettrale di segnali campionati. Se t_c è il tempo di campionamento e τ_c l'intervallo temporale fra i punti campionati ed N è il numero dei punti campionati si ha

$$t_c = N \cdot \tau_c = \frac{N}{f_c} = \frac{A}{B} \cdot \frac{N}{f_R}$$

dato che $f_c = f_R \frac{A}{B}$ nel nostro caso.

Il tempo t_c definisce la risoluzione in frequenza $\Delta\nu$ con cui viene riprodotto lo spettro del segnale, cioè

$$\Delta\nu = \frac{1}{t_c} = \frac{1}{N \cdot \tau_c} = \frac{f_c}{N} = \frac{A}{B} \cdot \frac{f_R}{N}$$

Da ciò consegue che una certa frequenza f_n dello spettro del segnale sarà rappresentata nell' n -sima componente spettrale come

$$n = \frac{f_n}{\Delta\nu} = f_n \cdot N \cdot \tau_c = \frac{f_n}{f_c} \cdot N = \frac{N \cdot B}{A} \frac{f_n}{f_R} \quad (5)$$

dove $n = 0$ corrisponde alla continua.

Poiché, come già detto, il nostro spettro campionato è compreso nell'intervallo $[0, \frac{f_c}{2})$ si vede dalla (5) che il massimo numero di componenti spettrali con frequenze positive che si possono ottenere è $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, zero compreso (simmetricamente per le frequenze negative); ed è $f_{\max} = \frac{f_c}{N} \lfloor \frac{N}{2} \rfloor =$

$$= \Delta\nu \lfloor \frac{N}{2} \rfloor = \frac{f_c}{2} \text{ se } N \text{ è pari, } f_{\max} = \frac{f_c - \Delta\nu}{2} \text{ se } N \text{ è dispari.}$$

Inoltre sempre dalla (5) risulta che il numero d'armonica n associato ad una certa componente spettrale dell'eco dipende, mantenendo costante $N.B/A$, solo dal rapporto fra tale frequenza e quella del riferimento.

Questo risultato conduce ad un'interessante proprietà allorchè, in un'elaborazione differita, l'eco e il riferimento siano registrati simultaneamente sullo stesso nastro magnetico.

In queste condizioni, supponiamo che in incisione o in riproduzione la velocità del nastro si modifichi o venga volutamente modificata da v a $v+\Delta v$. Le frequenze dei segnali incisi o riprodotti varieranno e si avrà

$$v : f_E = (v + \Delta v) : f'_E$$

$$v : f_R = (v + \Delta v) : f'_R$$

da cui

$$\frac{f_E}{f_R} = \frac{f'_E}{f'_R} \quad (6)$$

ovvero n_E per la (5) rimane costante.

Inoltre la (6) si può anche scrivere

$$\frac{f_E - f_R}{f_R} = \frac{f'_E - f'_R}{f'_R} \quad (7)$$

Tale quantità, allorchè sia stato definito cosa si intende per frequenza dell'eco f_E è la quantità che compare nell'equazione, approssimata al primo ordine, dell'effetto Doppler sonoro (Eq.1) allorchè $f_R = f_T$.

Comunque anche senza questa condizione, per la (6) e la (5) f_E è determinabile univocamente nota f_R .

E' sufficiente che la frequenza trasmessa f_T vari rigidamente nella stessa proporzione della frequenza del riferimento .

Ne risulta che fluttuazioni della velocità del nastro sia in incisione che in riproduzione non affettano la (1).

Inoltre questa proprietà, in un'analisi differita, ci permette di digitalizzare ad una velocità di riproduzione del nastro più alta di quella d'incisione risparmiando tempo dalle 2 alle 4 volte in tale operazione.

Infine anche in un'analisi in tempo reale l'uso per il campionamento di un riferimento che venga generato simultaneamente alla frequenza di trasmissione e quindi all'eco permette di evitare nella misura dello scostamento Doppler errori causati dalla deriva dell'oscillatore che genera le frequenze trasmesse: è necessario solo che la sua stabilità sia dell'ordine della durata di una scansione, nel nostro caso di alcuni secondi.

5. Relazioni fra i coefficienti della trasformata discreta quella continua e la serie di Fourier.

Dimostrazioni delle proprietà seguenti si possono trovare ad esempio in Cappellini et al. (1978); in questo contesto ci interessa invece porre l'accento sulle conseguenze di esse.

Sia $f(t)$ una funzione di durata arbitrariamente grande. Essa rappresenta l'informazione da elaborare. In particolare ci interessa la sua composizione in frequenza relativa a spezzoni temporali t_c .

Per far ciò è necessario discretizzare la funzione rispettando il criterio di Nyquist. Su tale campione di dati si applica la trasformata discreta di Fourier (DFT) che per N punti d'ingresso fornisce $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ punti complessi indipendenti in uscita in corrispondenza delle varie frequenze presenti nel segnale, come già precedentemente illustrato. Questo procedimento è concettualmente equivalente a prendere $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor + 1$ valori complessi

(ampiezza + fase) della trasformata continua del segnale $f(t)$ supposto nullo al di fuori dell'intervallo $(0, t_c)$ e anche limitato in banda.

Oppure equivale a considerare i coefficienti della serie di Fourier nella sua versione discreta per la $f(t)$ definita nell'intervallo $(0, t_c)$ e supposta periodica con periodo t_c .

La serie complessa di Fourier per un segnale limitato in banda si può scrivere come

$$f(t) = \sum_{n=-\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} D_n \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

dove $\omega_0 = \frac{2\pi}{t_c}$.

$$2|D_n| = 2|D_{-n}| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (9)$$

essendo A_n e B_n i coefficienti dell'espressione seno-coseno.

Se denominiamo con $G(n\omega_0)$ i campioni della trasformata continua di Fourier della $f(t)$ definita nell'intervallo $(0, t_c)$ esiste la relazione

$$D_n = \frac{G(n\omega_0)}{t_c} \quad (10)$$

dove è da notare che $|D_n|$ è dimensionalmente omogeneo a $f(t)$ mentre $G(n\omega_0)$ è una densità d'ampiezza.

Se indichiamo con $F(n\omega_0)$ i coefficienti della DFT essi sono relazionati a quelli della serie complessa di Fourier da

$$D_n = \frac{F(n\omega_0)}{N} \quad (11)$$

dove N rappresenta il numero di dati considerati.

Se siamo interessati a conoscere la potenza media di ciascuna armonica del segnale $f(t)$ nell'intervallo $(0, t_c)$ si ha

$$\begin{aligned}\bar{P}_n &= \frac{1}{2}(A_n^2 + B_n^2) = 2|D_n|^2 && \text{per } n \neq 0 \\ \bar{P}_0 &= \frac{A_0^2}{4} = |D_0|^2 && \text{per } n = 0\end{aligned}\quad (12)$$

Dalle (11) e (12) consegue che

$$\bar{P}_n = \frac{2}{N^2} |F(n\omega_0)|^2 \quad (13)$$

Valido per n qualsiasi, allorché si dimetta la parte reale e si ponga $\text{Re} = \text{Im}$ (ch. par. 6).

Definiamo inoltre densità spettrale di potenza per uno spettro

definito solo per frequenze positive la

$$W'(f) = 2 \lim_{t_c \rightarrow \infty} \frac{|G(f)|^2}{t_c} \quad (14)$$

dove $G(f)$ è la trasformata continua di Fourier della $f(t)$. Essendo quest'ultima non nulla solo nell'intervallo $(0, t_c)$ e anche con banda limitata di frequenze possiamo eliminare il limite, prendere dei campioni e considerando che dalla (10) si ha $t^2 |D_n|^2 = |G(n\omega_0)|^2$ sostituendo tale espressione nella (14) e tenendo presente la (12) e poi la (13) si ottiene

$$W'(n\omega_0) = \frac{2t_c}{N^2} |F(n\omega_0)|^2 \quad (15)$$

Infine applicando la definizione di potenza media totale nel dominio del tempo e usando la (13) si ha

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} f^2(n\tau_c) = \frac{2}{N^2} \sum_0^{N/2} |F(n\omega_0)|^2 \quad (16)$$

che è il teorema di Parseval nel discreto.

La dicitura "potenza" attribuita a \overline{P}_n o $f^2(n\tau_c)$ è da ritenersi puramente analogica. Infatti se la $f(t)$ è una tensione la $f^2(t)$ potrebbe essere intesa solo come una potenza normalizzata all'unità di resistenza.

D'altronde se la $f(t)$ è una velocità la normalizzazione dovrebbe considerare l'unità di tempo e l'unità di massa e anche eventuali fattori adimensionali.

6. Note sulla FFT

Un metodo efficiente per valutare la DFT è il cosiddetto algoritmo della FFT.

Per avere un'idea del risparmio di tempo che si ottiene utilizzando la FFT per l'analisi spettrale si considerino i seguenti fatti.

Innanzitutto il tempo di calcolo è proporzionale al numero di operazioni. Per operazione si intende la coppia moltiplicazione più addizione. Sia N il numero di punti campionati.

Per individuare tutti i coefficienti della versione discreta della serie di Fourier complessa occorrono N^2 operazioni reali.

Per calcolare direttamente i coefficienti della DFT occorrono invece $4N^2$ operazioni reali.

Se invece utilizziamo la FFT facendo inoltre sì che $N = 2^P$ con P naturale allora il numero di operazioni reali sarà $4N \log_2 N = 4NP$.

La procedura che utilizza tale proprietà è un caso speciale dell'algoritmo generale FFT ed è nota come metodo di Cooley & Turkey (1964). Per far sì che N sia una potenza di due è sempre possibile aggiungere alla nostra sequenza di dati, all'inizio o alla fine, il necessario numero di zeri.

L'aumento del numero dei punti dovuto all'aggiunta degli zeri aumenta il numero di armoniche intermedie fornite dall'analisi spettrale ma l'aumento di risoluzione è solo apparente potendosi vedere che quella effettiva dipende solo dalla lunghezza temporale dei dati reali.

Sottoprogrammi per il calcolo della FFT sono ormai disponibili anche a livello di microcalcolatori. Sono anche disponibili schede dedicate o strumenti che eseguono la FFT in tempo reale, più o meno costosi a seconda delle loro prestazioni.

I sottoprogrammi FFT in genere forniscono dati N punti in ingresso, N punti in uscita da intendersi parte reale e parte immaginaria di $N/2$ punti che sono le ampiezze complesse.*

In tal modo è possibile ricostruire fase e modulo delle componenti alle varie frequenze. Se la FFT viene calcolata con interi è necessario attribuire ai punti in ingresso i valori più alti possibili con un opportuno fattore di scala, in modo da evitare eccessive approssimazioni nei dati in uscita.

Spesso i numeri in uscita sono solo proporzionali ai valori veri. Infatti il modulo quadro dell'ampiezza complessa affinché rappresenti numericamente l'effettiva potenza dell'armonica deve essere trattato con la (13). Il fattore di scala $2/N^2$ non viene in genere ripristinato nei sottoprogrammi citati per mantenere la precisione anche negli eventuali calcoli successivi.

Inoltre per la densità spettrale di potenza si deve utilizzare la (15) in quanto nella digitalizzazione si perde la memoria del tempo.

* Alcuni programmi pongono per il valore medio $\text{Re} = \text{Im}$ dimezzando la parte reale: è ciò che produce l'uniformità di calcolo espressa nella (13).

Appendice 1 - Correlazioni incrociate nel dominio del tempo e in quello delle frequenze.

Nella campagna di misure di Turbigio nel settembre 1979 furono utilizzate tre antenne A, B, C puntate verticalmente e pilotate simultaneamente con la geometria illustrata in Fig. 6. L'intento era di misurare il vento di fondo e studiare la dinamica dei moti convettivi e di quelli ondosi mediante correlazioni incrociate

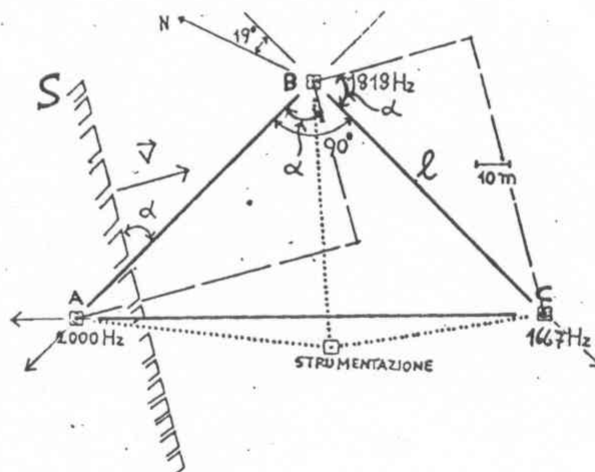


Fig. 6 - Geometria del sistema Sodar triassiale a puntamento verticale.

La misura del vento orizzontale con la geometria di Fig. 6 ipotizza che la struttura diffondente la cui traccia è S sia omogenea per una estensione pari alla distanza fra le antenne e che si muova alla velocità del vento e inoltre si mantenga coerente per il tempo sufficiente

ad attraversare la zona delle antenne.

In condizioni di instabilità convettiva le termiche, in linea generale, sembrano possedere tali proprietà mentre in condizioni di stabilità dinamica possono essere rivelati fenomeni ondosi che si propagano con una propria velocità (ad es. onde di gravità).

Fin dalle prime analisi ci si rese conto che le correlazioni non particolarmente selezionate fra le intensità degli echi delle tre antenne fornivano risultati aleatori laddove le correlazioni fra i campi della componente verticale del vento, almeno per la misura del vento orizzontale, davano migliori risultati in buon accordo con i sondaggi dei palloni pilota

Questo fatto si può spiegare con la diversità dei tempi caratteristici dei due fenomeni. Presumibilmente i microgradienti del campo della temperatura perdono coerenza più rapidamente dei gradienti macroscopici di vento delle correnti ascendenti e discendenti che formano le termiche.

Questo non significa che lo studio delle correlazioni fra le intensità degli echi sia privo d'interesse, tutt'altro, poichè in virtù di esse in linea di principio è possibile analizzare l'importante fenomeno del tempo di decadimento della turbolenza termica. Nel discorso che segue ci si riferisce alle correlazioni tra i campi del vento verticale.

Sono stati correlati i segnali delle coppie di antenne AB e BC; infine, come controllo, è stata eseguita la correlazione AC in relazione con le due precedenti.

Le correlazioni incrociate si possono eseguire nel dominio del tempo o in quello delle frequenze.

Le correlazioni nel dominio del tempo sono state realizzate fra due vettori di dati $x_i(z)$ e $y_i(z)$ relativi ai segnali di ciascuna delle due antenne considerate, campionati ad intervalli τ_c . Il numero dei dati dei due vettori da correlare viene scelto in base alle periodicità visibi-

li sulla registrazione facsimile.

Il numero dei dati di uno dei due vettori, quello mobile, è in pratica un terzo dell'altro in tal modo per ogni τ si calcola il coefficiente di correlazione muovendo il vettore più piccolo a destra e a sinistra dalla iniziale posizione centrale definita a ritardo nullo, senza variare il numero dei prodotti.

Il coefficiente di correlazione viene calcolato secondo la (Bendat e Piersol, 1971)

$$P_{xy}(\tau, \tau_c) = \frac{\frac{1}{N} \sum_i^N y_i \cdot x_{i+\tau}}{\left(\frac{1}{N} \sum_i^N x_i^2\right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{N} \sum_i^N y_i^2\right)^{1/2}} \quad (17)$$

con $\tau = \pm(0, 1, 2, \dots, m)$, $-1 \leq P_{xy} \leq 1$, dove N è il numero dei prodotti $x_i \cdot y_i$ da eseguire per ogni τ . Nel nostro caso N coincide con il numero di punti di y_i .

Non è stata rimossa la media dei dati per una precisa ragione. Ciò che si confronta sono i campi della componente verticale della velocità del vento. Sia S , dalla Fig. 6, la traccia di una struttura diffondata che si muove nella zona delle antenne alla velocità del vento orizzontale v che forma l'angolo α con l'asse BA . Tale struttura intersecherà ad un certo istante A e dopo un ritardo da determinare con la (17) sarà sull'antenna B con una zona spazialmente distante. È chiaro che la prima ipotesi è l'omogeneità trasversale sulla scala della geometria del sistema e l'altra è la coerenza durante il tempo di transito da A a B . In definitiva su B ci aspettiamo una configurazione del campo verticale del vento abbastanza simile a quello in A non solo come andamento ma anche come valore e orientamento. Per tenere conto di tutti questi elementi non si deve rimuovere la media che polarizza i dati.

Calcolata la (17) per i vari $\tau \cdot \tau_c$ si disegna la funzione di correlazione. In generale tale funzione presenta un massimo sufficientemente definito per un certo $\tau \cdot \tau_c$ per ciascuno degli assi BA, BC, CA e denominiamo tali ritardi τ_{BA} , τ_{BC} , τ_{CA} .

Noti tali ritardi ed essendo "e" uno dei cateti del triangolo rettangolo isoscele della Fig. 6 bisogna determinare $|\nabla|$ ed α .

Si hanno evidentemente le relazioni seguenti

$$V \cdot \tau_{AB} = l \cdot \sin \alpha$$

$$V \cdot \tau_{BC} = l \cdot \cos \alpha$$

da cui quadrando e sommando membro a membro si ha

$$V = \frac{l}{\sqrt{\tau_{BA}^2 + \tau_{BC}^2}} \quad (18)$$

e infine

$$\alpha = \arctg \frac{\tau_{BA}}{\tau_{BC}} \quad (19)$$

Per definire con il giusto segno la relazione di τ_{CA} con gli altri due ritardi è necessario fissare il modo in cui si muovono i vettori per la correlazione.

Si conviene che per gli assi BA e BC sia il vettore relativo a B a scorrere mentre per l'asse CA sia quello relativo a C.

In tal modo

$$\tau_{BA} = \tau_{BC} + \tau_{CA} \quad (20)$$

Quest'ultima relazione può essere usata come controllo di una effettiva correlazione tra BA e BC.

Non sempre nei casi reali la funzione di correlazione calcolata con questo metodo è senza ambiguità. A volte accade che si presentino più massimi e minimi a seconda della scelta della lunghezza dei vettori oppure si verificano massimi molto piatti di difficile localizzazione temporale e più raramente anche basse correlazioni. Si è notato ad esempio che nei casi più sicuri la correlazione per i dati analizzati è spesso

$$P_{xy} > 0,5 \quad \text{con } N = 150.$$

Miglioramenti alla procedura precedente potrebbero essere i seguenti.

Scelta di una soglia ragionata per P_{xy} .

Costruzione di un dominio permesso (τ_{BA}, τ_{BC}) per cui valga la (20) entro un errore da stabilire.

Valutazione della funzione $P = P(\tau_{BA}) \cdot P(\tau_{BC})$ e ricerca del suo massimo.

Un'alternativa al procedimento precedente sarebbe quella di passare nello spazio delle frequenze. In tal modo oltre che individuare i ritardi si potrebbe mettere in evidenza la loro eventuale dipendenza dalla frequenza; caratteristica quest'ultima molto utile soprattutto nello studio di moti ondosi, per esempio nell'identificazione di onde di gravità.

Concettualmente il procedimento consiste nell'utilizzare la trasformata di Fourier della funzione di correlazione (Bendat e Piersol, 1971).

Praticamente si può procedere nel modo seguente.

Siano x_i, y_i le sequenze di dati relative a due antenne $i = 1, 2, \dots$

N. Si calcolano le trasformate di Fourier X_k, Y_k complesse con $k = 0, 1, 2, \dots$

Ricordando la (15) e il fatto che la trasformata del numeratore della (17), essendo quest'ultima una convoluzione nel dominio del tempo, diviene un prodotto nello spazio delle frequenze, si scriverà la densità spettrale della funzione di correlazione come

$$\tilde{G}_{xy}(f_k) = \frac{2t_c}{N^2} (X_k^* \cdot Y_k)$$

dove X_k^* è il complesso coniugato di X_k , $f_k = \frac{k}{t_c}$ e la tilde indica che essa è il cross-spettro non smussato. Utilizzando qualche tipo di media o di smussamento si trasforma $\tilde{G}_{xy}(f_k)$ nello spettro mediato $\hat{G}_{xy}(f_k)$ dove le ultime f_k non coincideranno in generale con le precedenti né sono nello stesso numero per via della media.

Si calcolano le densità spettrali di potenza dei singoli vettori secondo la (15) come

$$\tilde{G}_x(f_k) = \frac{2t_c}{N^2} |X_k|^2 \quad \text{e} \quad \tilde{G}_y(f_k) = \frac{2t_c}{N^2} |Y_k|^2$$

mediando anche tali spettri.

Infine si definisce funzione di coerenza la

$$\hat{\gamma}_k^2 = \frac{|\hat{G}_{xy}(f_k)|^2}{\hat{G}_x(f_k) \hat{G}_y(f_k)} \quad (21)$$

in cui $0 \leq \hat{\gamma}_k^2 \leq 1$ e nei calcoli effettivi si possono trascurare i fattori $\frac{2t_c}{N^2}$.

$$\text{Poichè si può scrivere } \hat{G}_{xy}(f_k) = \hat{C}_{xy}(f_k) - j \hat{Q}_{xy}(f_k)$$

si definisce fase della funzione di coerenza la

$$\hat{\theta}_{xy}(f_k) = \arctan \left(\frac{\hat{Q}_{xy}(f_k)}{\hat{C}_{xy}(f_k)} \right) \quad (22)$$

da cui i ritardi tra i segnali visti dalle coppie di antenne si espri-

mono come

$$c_k = \frac{\hat{\theta}_{xy}(f_k)}{2\pi f_k} \quad (23)$$

nella quale si evidenzia la relazione rispetto alle frequenze, come si voleva.

La funzione di coerenza come quella di correlazione nel dominio del tempo esprimono connessioni causali oppure derivazione dei fenomeni da una causa primaria.

Queste due situazioni sono per la coerenza indistinguibili. Accertato però il rapporto causale la funzione di coerenza valuta la sua entità per ciascuna frequenza.

Questo fatto è di grande utilità in quanto il valore della funzione di coerenza ad una determinata frequenza può essere inteso anche come la frazione di potenza del segnale in uscita di un sistema che è causata dall'ingresso.

Se il sistema è non-lineare esso genererà internamente delle frequenze spurie, queste ultime verranno trattate dalla funzione di coerenza come rumore e daranno luogo a valori bassi di essa ad alcune frequenze. In linea di principio è quindi possibile stimare con la funzione di coerenza le non linearità di un sistema che possono essere non visibili in una funzione di trasferimento (rapporto nel dominio delle frequenze fra uscita e ingresso).

BIBLIOGRAFIA

- Cooley, J.W. and Tukey J. W., 1965; An algorithm for the machine calculation of Complex Fourier series. Math. Comp. 19.
- Reference data for radio engineers, 1968; 5th ed. - I.T.T., Howard W. Sams & CO., Inc.
- Bendat, J.S., A.G. Piersol, 1971; Random data: Analysis and measurement procedures. WILEY-INTERSCIENCE.
- Taub & Schilling, 1971; Principles of Communication Systems. Mc Graw-Hill.
- Oran Brigham E., 1974; The fast Fourier transform. Prentice Hall. Inc.
- Spizzichino, A., 1974; Utilization du Sodar Doppler II - Optimisation des conditions de fonctionnement. Note technique EST/RSR/82.
- Spizzichino, A., P. Van Grunderbeeck, 1975; Etude des plumes convectives de la basse atmosphere par sondage acoustique Doppler. Note technique CRPE/34.
- Gadway, J.R., 1975; Principles of data acquisition and conversion. Application note, Bwt-Brown.
- Owens, E.J., 1975; NOAA MARK VII Acoustic echo sounder. Noaa Tech. Mem., Boulder Colorado.
- Jeffrey Keeler, R., 1976; A frequency discriminator VS-FFT Doppler extraction. NOAA Tech. Mem. ERLWPL-17.
- Ricotta, A., 1976; Sviluppo di un radar acustico e sue applicazioni allo studio della dinamica dello strato limite planetario. Tesi di Laurea in Fisica, Univ. di Roma.
- Ricotta, A., M. Berico, 1980; Sodar tristatico. Rapporto interno LPS 80-6 Frascati.
- Ricotta, A., M. Viterbini, 1983; Realizzazione di un filtro attivo passa banda sintonizzabile tramite clock, del 12° ordine, con moduli UAF tipo MF10, a capacità commutate. Nota Interna IFA 83/3.
- Ricotta, A., M. Berico, S. Mazzola, 1983; Structure of the vertical velocity field analyzed with a Doppler Sodar. Submitted to BLM.