Il Paradosso del Pittore di Trombetta

Angelo Ricotta
angeloricotta@gmail.com

La trombetta del paradosso è la cosiddetta Tromba di Torricelli (anche Gabriel's Horn in Wikipedia) una superficie che si ottiene dalla rotazione di un ramo di iperbole di ordine 1 intorno a un suo asintoto. Possiamo costruire la tromba di Torricelli considerando il ramo positivo dell'iperbole di equazione $x = \frac{1}{z}$ e ruotandolo intorno a z come mostrato in Fig.1

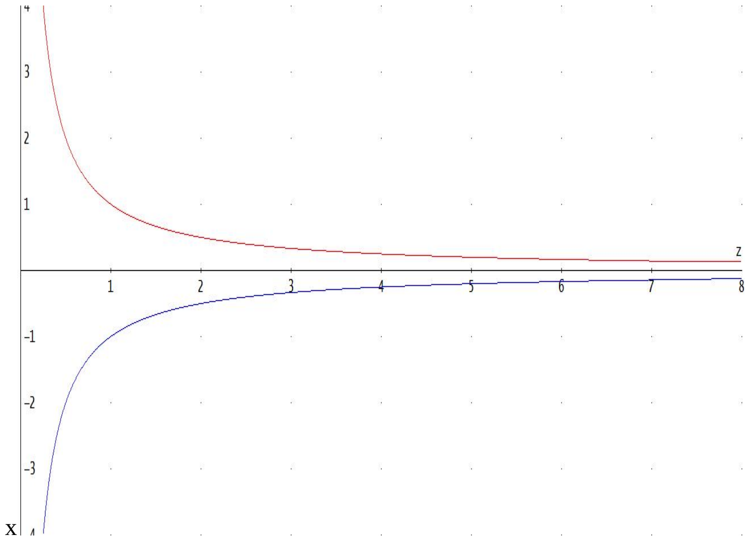

Fig.1 Traccia sul piano zx della tromba di Torricelli

il cui aspetto tridimensionale in un intervallo limitato è

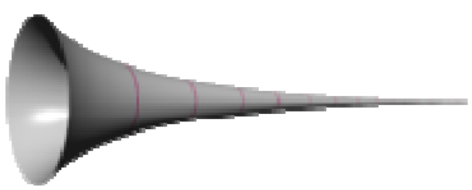

Fig.2 Tromba di Torricelli

Ponendo l'asse z in verticale la tromba appare come in Fig.3.

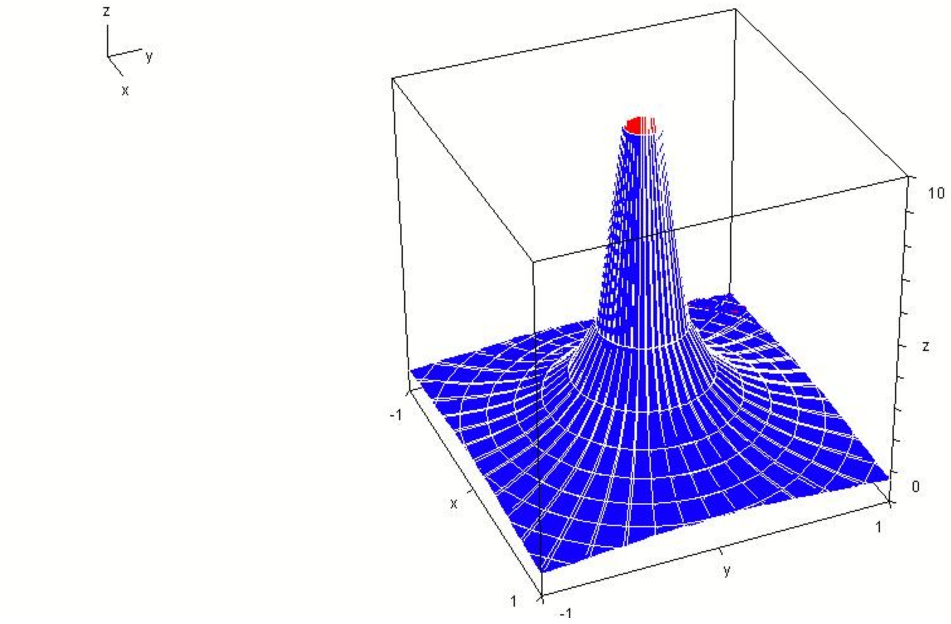

Fig.3 Tromba di Torricelli

L'asintoto scelto per la rotazione è l'asse z e l'equazione della superficie è $z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$. Se calcoliamo il volume inglobato dalla superficie tra il piano xy e $z \to +\infty$ troviamo che esso è infinito e così dicasi dell'area della superficie stessa. Se però calcoliamo le stesse quantità ad esempio tra $z = 1$ e $z \to +\infty$ allora troveremo che mentre l'area della superficie rimane infinita il volume diviene finito e pari a $V_{z=1}^{z \to +\infty} = \pi$. Trattandosi di una superficie di rivoluzione per calcolare l'area della superficie e il volume possiamo usare le seguenti formule (consultare un qualsiasi testo di analisi infinitesimale)

$$V_{z=1}^{z \to +\infty} = \pi \int_{z=1}^{z \to +\infty} \frac{1}{z^2} dz = \pi$$

$$A_{z=1}^{z \to +\infty} = 2\pi \int_{z=1}^{z \to +\infty} \frac{1}{z} \sqrt{1 + \frac{1}{z^4}}\, dz = +\infty$$

Queste proprietà, messe in luce proprio da Torricelli (1608-1647), destarono a quel tempo grande meraviglia e scatenarono accesi dibattiti e persino polemiche che portarono allo sviluppo dell'analisi infinitesimale allora ai primordi.
Il paradosso del pittore di trombetta è una volgarizzazione pittorica di queste proprietà. Si immagina che un pittore voglia dipingere le pareti esterna ed interna della tromba, definita tra $z = 1$ e $z \to +\infty$, con della vernice e si chiede di calcolarne la quantità necessaria ovvero il volume. È chiaro che dal punto di vista fisico il problema è mal posto a causa della granularità della struttura della materia che non permette di scendere al di sotto di un numero imprecisato di molecole altrimenti non avrebbe più senso il dipingere, mentre le dimensioni della tromba nella coda $z \to +\infty$ tendono a zero, inoltre non viene definito lo spessore della vernice. Dobbiamo perciò

assumere che si tratti innanzitutto di una vernice matematica infinitamente suddivisibile, un fluido continuo, e che il suo spessore sia a nostro piacimento.
Il paradosso consiste nel fatto che essendo il volume interno della tromba , definita tra $z = 1$ e $z \to +\infty$, finito e anzi relativamente piccolo, in quanto pari a π, per dipingere l'interno naturalmente basterà versare dentro un volume π di vernice, mentre se si stende uno spessore sia pure molto piccolo ma uniforme di questa speciale vernice all'esterno ne occorrerà un volume infinito essendo l'area infinita.
Ho notato che sia in diversi siti su internet sia in qualche articolo e libro di matematica divulgativi il paradosso viene presentato come un fatto sconcertante, non diversamente da quanto accadeva ai tempi di Torricelli, mostrando così che, nonostante i diversi secoli trascorsi, certi concetti fondamentali di analisi matematica non sembrano stati ancora ben assorbiti anche da persone che hanno una cultura matematica. Per questo mi sono deciso a scrivere questa breve nota di chiarimento.
Un lettore attento avrà notato che lo spessore della vernice interna non è costante e decresce verso la coda con un profilo $\frac{1}{z}$ mentre all'esterno abbiamo supposto che fosse uniforme anche se piccolo a piacere. La chiave risolutiva del paradosso è proprio in questa differenza. In realtà non c'è alcuna difficoltà a pitturare anche l'esterno con un volume finito di vernice. Per capire in modo semplice come ciò possa realizzarsi consideriamo una sezione della superficie di Fig.2 sul piano zx con z in ascisse e x in ordinate come in Fig.4 nella quale i rami d'iperbole più interni sono le tracce della sezione di Fig.2 di equazione $x = \pm\frac{1}{z}$ mentre quelli più esterni sono le tracce di equazione $x = \pm\frac{3}{2z}$ di una tromba avviluppante quella di Fig.2 e asintotica ad essa

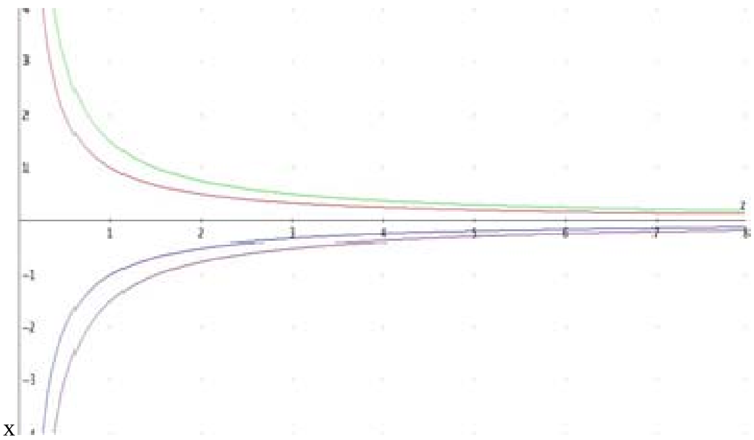

Fig.4 Sezioni zx delle trombe

La tromba asintotica ha un volume finito pari a

$$V_{z=1}^{z\to+\infty} = \pi \int_{z=1}^{z\to+\infty} \frac{9}{4z^2}\, dz = \frac{9}{4}\pi$$

mentre l'area è sempre infinita

$$A_{z=1}^{z\to+\infty} = 2\pi \int_{z=1}^{z\to+\infty} \frac{3}{2z}\sqrt{1+\frac{9}{4z^4}}\, dz = +\infty$$

Pertanto l'intercapedine tra le due trombe avrà un volume di

$$\Delta V_{z=1}^{z\to+\infty} = \frac{9}{4}\pi - \pi = \frac{5}{4}\pi$$

facilmente riempibile con la nostra speciale vernice la quale pitturerà sia l'esterno della tromba più interna sia l'interno della tromba più esterna.
Non si creda però che la possibilità di pitturare le superfici infinite dipenda dal fatto che il volume interno delle trombe originali sia finito. È facile vedere che anche in presenza di volumi infiniti le superfici infinite si possono pitturare con un volume finito di vernice. Consideriamo infatti una tromba ottenuta dalla rotazione dell'iperbole $x = \frac{1}{\sqrt{z}}$ intorno all'asse z.

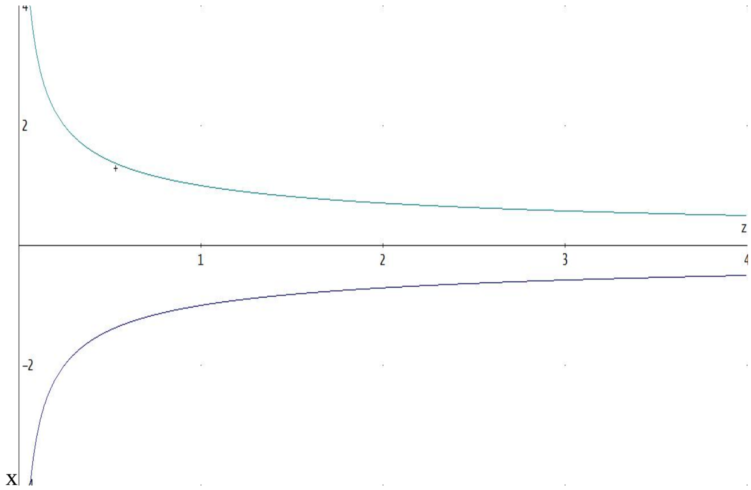

Fig.5 Sezione zx della tromba con profilo $x = \frac{1}{\sqrt{z}}$

Questa tromba ha sia l'area $A_{z=1}^{z\to+\infty}$ che il volume $V_{z=1}^{z\to+\infty}$ infiniti com'è facile mostrare. Infatti è

$$A_{z=1}^{z\to+\infty} = 2\pi \int_{z=1}^{z\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{z}}\sqrt{1+\frac{1}{4z^3}}dz = +\infty$$

$$V_{z=1}^{z\to+\infty} = \pi \int_{z=1}^{z\to+\infty} \frac{1}{z}dz = +\infty$$

Per colorare sia la superficie esterna che quella interna con un volume finito di vernice è sufficiente costruire due trombe asintotiche a quella di Fig.5: una contenuta e l'altra contenente l'originale e i cui profili abbiano, ad esempio, i seguenti andamenti

Tromba contenuta: $x = \frac{1}{2z}$

Tromba contenente: $x = \frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2z}$

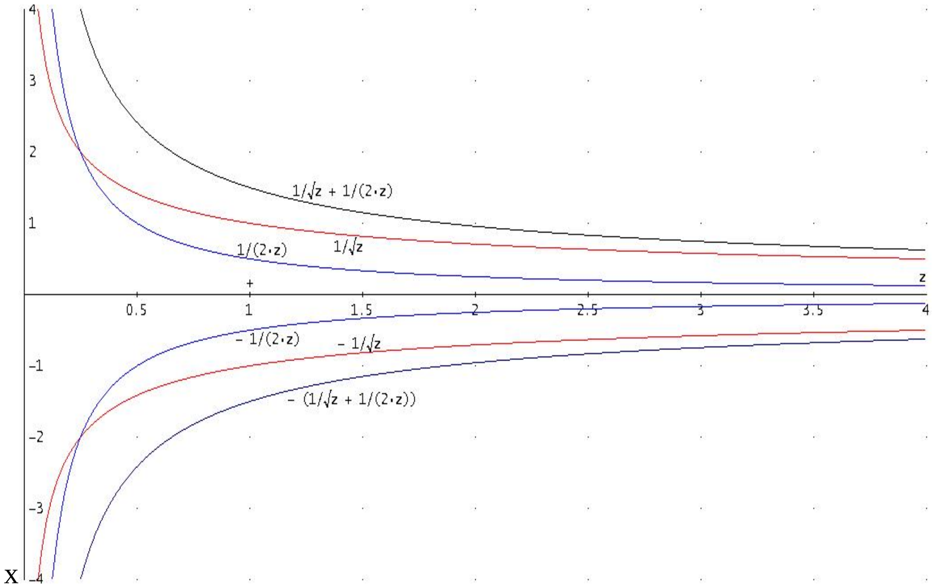

Fig.6 Sezione zx trombe asintotiche interna ed esterna a $x = \frac{1}{\sqrt{z}}$

Le rispettive intercapedini interna ed esterna avranno volumi finiti e pari a

$$\Delta V_{INTERNA} = \pi \int_{z=1}^{z \to +\infty} [(\frac{1}{\sqrt{z}})^2 - (\frac{1}{2z})^2] dz = \frac{7}{4}\pi$$

$$\Delta V_{ESTERNA} = \pi \int_{z=1}^{z \to +\infty} [(\frac{1}{\sqrt{z}} + \frac{1}{2z})^2 - (\frac{1}{\sqrt{z}})^2] dz = \frac{9}{4}\pi$$

Quello che conta è quindi che il profilo dello spessore di vernice deve decrescere in modo sufficientemente rapido tal che la somma degli infiniti volumetti elementari, che è ciò che esprime nel nostro caso il simbolo di integrale, converga. Questo è uno dei concetti fondamentali del calcolo infinitesimale, codificato in criteri di convergenza. Pertanto scegliendo opportune funzioni asintotiche si possono ridurre i volumi delle intercapedini di quanto si vuole.
Infine se immaginiamo la tromba di Torricelli di Fig.2 come una torta ripiena, definita tra $z = 1$ e $z \to +\infty$, essendo essa di volume finito pari a π è scontato che la si possa sezionare in n tronchetti di volume finito con tagli perpendicolari all'asse z. Il pezzo terminale avrà un volume finito pari a π/n anche se la sua lunghezza è infinita!