Correndo ancora sotto la pioggia

Angelo Ricotta
angeloricotta@gmail.com

La pioggia stimola la fantasia non solo dei poeti ma anche dei fisici e di altri studiosi.
Infatti quello qui presentato è un vecchio problema sulla pioggia, molto discusso nel corso dei decenni [1][2][3][4][5] ma pur sempre interessante da riproporre.
Si vuole andare (Fig. 1) dal riparo A al riparo B attraversando uno spazio aperto di lunghezza L sul quale insiste una pioggia uniforme e continua con velocità $\vec{w}$.
Ci si chiede se, per bagnarsi di meno, esista una velocità ottimale oppure occorra correre il più velocemente possibile.

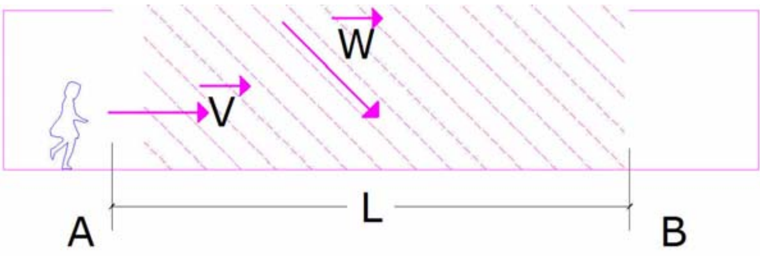

Fig. 1

Quella di cui sopra è già una formulazione idealizzata (pioggia uniforme e continua) e sottintende altre caratteristiche semplificatorie. Per dare una risposta precisa al problema più generale è intuitivo che occorre definire la forma dell'oggetto in moto, le caratteristiche del movimento, le componenti della velocità della pioggia, del vento e del mobile in funzione del tempo, nonché dimensioni e concentrazione delle gocce d'acqua.
Uno studio recente in tal senso è citato nella bibliografia [5].
Il nostro intento però è quello di evidenziare alcuni aspetti essenziali della soluzione del problema utilizzando solo dell'algebra elementare. Per far ciò dobbiamo operare con un modello molto semplificato. Tratteremo il caso di una pioggia bidimensionale, lasciando al lettore volenteroso l'estensione tridimensionale come utile esercizio. Schematizziamo la persona, o comunque il mobile che si sposta da A a B, come un parallelepipedo (Fig. 2) con area superiore pari a S e area frontale F. Le aree laterali entrano in gioco solo nel caso tridimensionale.

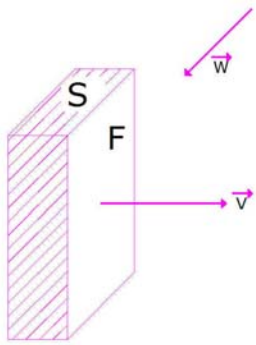

Fig. 2

Per quanto riguarda la direzione di caduta della pioggia è opportuno, da un punto di vista didattico, distinguere tre casi: pioggia verticale, pioggia inclinata con componente contro il verso del moto, pioggia inclinata con componente nel verso del moto.
Poiché la pioggia è costituita da goccioline d'acqua distanziate tra loro nell'aria, il flusso volumetrico che investe le superfici è costituito da aria più acqua. Dato che a noi interessa il solo flusso di volume d'acqua occorrerà determinare quest'ultimo in funzione del precedente.
L'intensità I della pioggia è espressa come altezza della pioggia che si accumula in un recipiente cilindrico in una certa unità di tempo. Infatti un semplice pluviometro è costituito da un recipiente cilindrico (Fig. 3) nel quale si raccoglie l'acqua piovana e se ne misura l'altezza raggiunta in certi intervalli di tempo, in genere mm/ora.
Il volume d'acqua che investe la superficie A in un tempo t sarà dato da

$$V_A = IAt \tag{1}$$

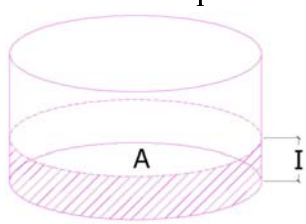

Fig. 3

D'altronde il flusso volumetrico Φ_A di acqua e aria che investe la superficie A in un tempo t, per una pioggia con componente della velocità w_z perpendicolare ad A, è

$$\Phi_A = w_z A t \qquad (2)$$

Da (1) e (2) si ottiene

$$V_A = \frac{I}{w_z}\Phi_A \qquad (3)$$

La quantità adimensionale $\frac{I}{w_z}$ rappresenta il rapporto tra il volume d'acqua e il corrispondente volume di aria più acqua, pertanto la relazione (3) si può utilizzare non solo per calcolare il volume d'acqua che investe la superficie S ma anche il volume d'acqua che investe la F (Fig. 2).

a) Pioggia verticale

Notare che la pioggia verticale $\vec{w}_z$ appare, nel riferimento (Fig. 4) dell'osservatore in moto con velocità costante $\vec{v}$ parallela al terreno, come una $\vec{w}$ inclinata di un angolo ϑ rispetto alla verticale. Comunque conoscendo già le componenti delle velocità perpendicolari alle superfici possiamo calcolare i flussi volumetrici di acqua più aria (flussi entranti definiti positivi) che investono le superfici S e F

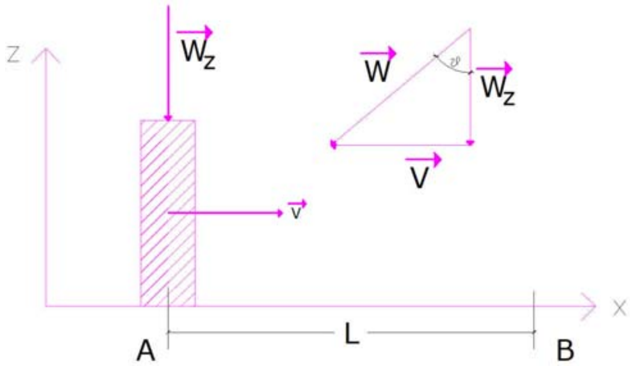

Fig. 4

$$\Phi_S = w_z S t \qquad \Phi_F = v F t$$

Pertanto il flusso totale sarà

$$\Phi_T = \Phi_S + \Phi_F = (w_z S + v F)t$$

Essendo $t = \frac{L}{v}$ e utilizzando la (3) si ottiene

$$V_T = \left(\frac{S}{v} + \frac{F}{w_z}\right) I L \qquad (4)$$

Nella (4) dati S, F, I, L, w_z si vede (Fig.7, a) che il valore più basso di V_T si raggiunge, asintoticamente, per $v \to +\infty$ e vale $\frac{FIL}{w_z}$.

b) Pioggia inclinata con componente contro il verso del moto

Dal punto di vista dell'osservatore in moto (Fig. 5) la componente della pioggia lungo x è $(w_x + v)$ mentre quella lungo z è w_z. Pertanto i flussi volumetrici saranno

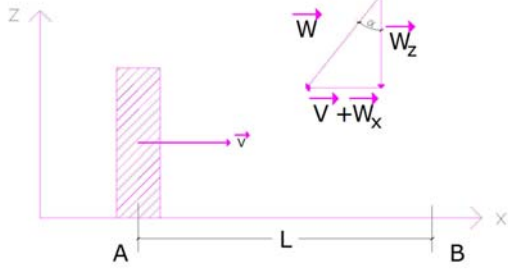

Fig. 5

$$\Phi_S = w_z S t \qquad \Phi_F = (w_x + v) F t$$

Quindi il flusso totale sarà

$$\Phi_T = \Phi_S + \Phi_F = \left[w_z S + (w_x + v) F \right] t$$

Essendo $t = \dfrac{L}{v}$ e utilizzando sempre la (3) si ottiene

$$V_T = \left(\frac{S}{v} + \frac{w_x + v}{w_z v} F \right) I L \qquad (5)$$

Anche in questo caso V_T diminuisce (Fig.7, b) all'aumentare di v. Dati S, F, I, L, w_z, w_x si vede che il valore più basso di V_T si raggiunge, sempre asintoticamente, per $v \to +\infty$ e vale $\dfrac{FIL}{w_z}$, come nel caso a).

c) Pioggia inclinata con componente nel verso del moto

In questo caso (Fig. 6) dobbiamo prendere in considerazione anche la superficie posteriore P che, nel nostro modello, ha area uguale a quella di F: $P = F$.
Dal punto di vista dell'osservatore in moto si ha: se $v > w_x$ il flusso entrante sarà su F, mentre se $v < w_x$ il flusso entrante sarà su P. Essendo $P = F$ possiamo scrivere

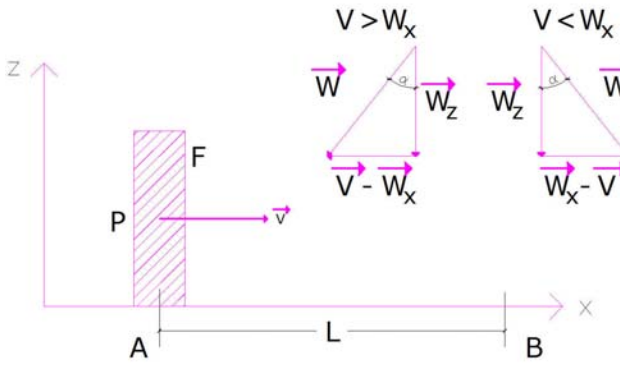

Fig. 6

$$\Phi_S = w_z S t \qquad \Phi_F = |v - w_x| F t$$

Pertanto il flusso totale sarà

$$\Phi_T = \left(w_z S + |v - w_x| F \right) t$$

Essendo $t = \dfrac{L}{v}$ e utilizzando ancora la (3) si ottiene

$$V_T = \left(\frac{S}{v} + \frac{|v - w_x|}{w_z v} F \right) I L \qquad (6)$$

Per $v = w_x$ si ha $V_T = \dfrac{SIL}{w_x}$, mentre per $v \to +\infty$ si raggiunge il valore asintotico $\dfrac{FIL}{w_z}$.

Pertanto se $F > \dfrac{w_z}{w_x} S$ la V_T ha un minimo in un punto angoloso (Fig.7, c) per $v = w_x$. Se $F < \dfrac{w_z}{w_x} S$ la V_T ha sempre un punto angoloso in corrispondenza di $v = w_x$ (Fig.7, d) ma il valore più basso si ottiene per $v \to +\infty$ con valore asintotico $\dfrac{FIL}{w_z}$.

Conclusioni

Nelle condizioni illustrate nell'articolo e in Nota 3, riferendosi alla Fig.7, si può notare che l'istinto di correre il più velocemente possibile per bagnarsi di meno sotto la pioggia, e magari rannicchiandosi per diminuire la superficie d'impatto, è confermato. Inoltre non è necessario correre come un olimpionico (sui $v = 10\,m/s$) ma che basta un'allegra corsetta intorno ai $v = 3\,m/s$ per bagnarsi quasi quanto l'olimpionico o poco di più. Nel caso studiato nel §c) (Fig. 7c) esiste una velocità ottimale con $v = w_x$, ma correre più velocemente comporta solo un piccolo aumento della pioggia impattata.

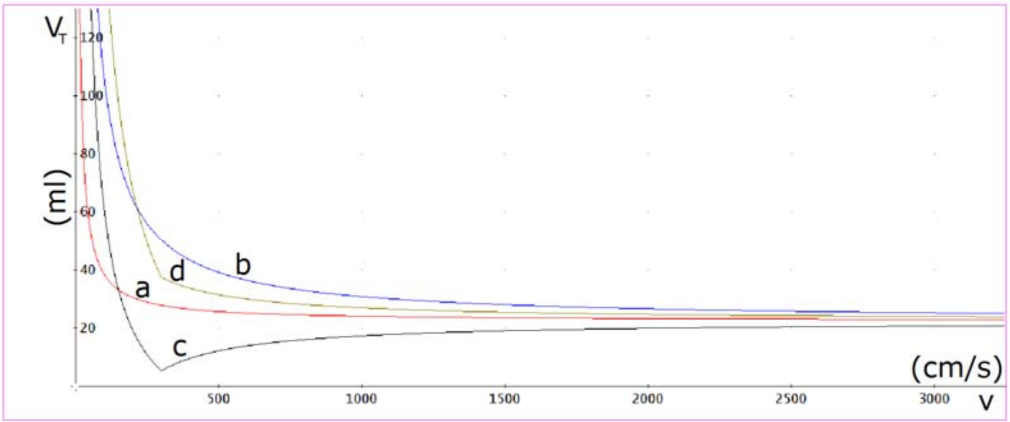

Fig. 7

Note

1) Per passare dalle nostre formule a quelle di Alessandro De Angelis [1], e viceversa, la relazione fondamentale è $\Phi_A(t) = vAt = NV_c$, in cui $V_c = d_{0x}d_{0y}d_{0z}$ è la cella d'aria contenente una sola goccia d'acqua.
2) Nella nostra schematizzazione abbiamo anche trascurato il fatto che ci sono flussi tangenziali alle superfici S e F che, nella realtà, contribuirebbero a bagnare tali superfici. Inoltre il volume d'acqua effettivamente assorbito dalle superfici sarà minore del flusso d'acqua che vi impatta.
3) Notare che $v = 1\,m/s$ è una normale camminata mentre $v = 10\,m/s$ è un record olimpionico.
   La Fig. 7 mostra valori molto superiori a quest'ultimo essenzialmente per dare un'idea visuale dell'asintoto orizzontale. I grafici di Fig. 7 (a, b, c) sono stati ottenuti con i seguenti valori dei parametri: $S = 967\,cm^2$, $F = 6774\,cm^2$, $w_z = 500\,cm/s$, $w_x = 300\,cm/s$, $I = 8{,}3x10^{-5}\,cm/s$, $L = 2x10^4\,cm$ che sono quelli preselezionati in http://www.dctech.com/physics/notes/0006.php con cui sono stati fatti i confronti.
   Per la (Fig. 7, d) è $S = 6774\,cm^2$.
4) È facile immaginare che esista una correlazione tra l'intensità I della pioggia e la velocità terminale $\vec{w}$ della stessa, e quindi con le dimensioni delle gocce. Utilizzando tale relazione potremmo esprimere, nelle nostre formule, la $\vec{w}$ in funzione di I. Questa correlazione è oggetto di studi sulla pioggia e qui si entrerebbe nella ricerca fisica sulle precipitazioni. L'uso di tale relazione complicherebbe di molto la trattazione che vogliamo invece mantenere ad un livello elementare. Per chi vuole approfondire diamo i riferimenti [6][7][8]. La I è una grandezza più facile da misurare di $\vec{w}$ e infatti è quella normalmente fornita nei dati meteo. Non possedendo una misura di $\vec{w}$ le formule ricavate per il calcolo del flusso d'acqua attraverso le superfici

potrebbero apparire di poca utilità. La nostra trattazione però non intende misurare con precisione il flusso d'acqua che impatta sulle superfici ma solo rispondere alla domanda posta dall'enunciato del problema, nell'ambito del modello utilizzato.

Ringraziamenti

Ringrazio l'Arch. Emiliano Ricotta per l'elaborazione delle figure con Autocad.

Bibliografia

[1] Alessandro De Angelis, Is it really worth running in the rain?, Eur. J. Phys., 1987, 8, 201-202
[2] Herb Bailey, On running in the rain, The College Mathematical Journal, 2002, 33, 88-92
[3] Göran Grimvall, Brainteaser physics: challenging physics puzzlers, The Johns Hopkins University Press, 2007
[4] http://www.dctech.com/physics/notes/0006.php
[5] Franco Bocci, Whether or not to run in the rain, Eur. J. Phys., 2012, 33, 1321-1332
[6] Christian Salles, Jean Poesen, Daniel Sempere-Torres, Kinetic energy of rain and its functional relationship with intensity, J. Hydrology, 2002, 257, 256-270
[7] A.I.J.M. van Dijk, L.A. Bruijnzeel, C.J. Rosewell, Rainfall intensity-kinetic energy relationships: a critical literature appraisal, 2002, 261, 1-23
[8] http://pajk.arh.noaa.gov/profiler/profilerVV.html